Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $(3-2i)(i+1)$
2) $(4-2i)(4+2i)$
3) $\dfrac{1+2i}{5-3i}$
4) $\dfrac{-5}{7+i}$
5) $(1+i)^4$
6) $\left(\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (donner le résultat sous forme algébrique) :

1) $4iz+2=3-2i$
2) $z(1+i)=1-zi$
3) $\dfrac{1}{2iz}+5=3i$
4) $\overline{z+5i}=z(3-i)$
5) $z^2+2z+2=0$
6) $\dfrac{13}{z}=6-z$

Exercice 3

Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

1) $z_1=5+5i$
2) $z_2=\sqrt{3}-i$
3) $z_3=12i-4\sqrt{3}$
4) $z_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
5) $z_5=-7$
6) $z_6=-5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 4

Calculer en utilisant la forme exponentielle :

1) $z_1=\dfrac{1+i}{1-i}$
2) $z_2=(2+2i)^4$
3) $z_3=(\sqrt{3}+3i)^7+(\sqrt{3}-3i)^7$
4) $z_4=\displaystyle\sum_{k=0}^{17}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k$

Exercice 5

On note $Z=\dfrac{i-z}{z+2}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1) Z est un imaginaire pur
2) Z est un réel
3) Z a un module égal à 1

⋆ ⋆
Exercice 6

(D'après Bac S Antilles Guyane Septembre 2017) On considère la suite de nombres complexes z_n définie par

$$\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \dfrac{i}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.
3) En déduire qu'à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent à un disque de centre O et de rayon $0,01$.

⋆
Exercice 7

(D'après Bac S Métropole - La Réunion 2017) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z$$

Le point M' est appelé image du point M.

1) Déterminer les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.
2) Soit M un point d'affixe z et soit M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$
   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

⋆
Exercice 8

(D'après Bac S Polynésie 2015) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.
2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

⋆
Exercice 9

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{1 + \overline{z}}{1 - z}$ est un réel si et seulement si z est un réel ou z est un imaginaire pur.

⋆ ⋆
Exercice 10

Soit z un nombre complexe différent de 1. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

⋆
Exercice 11

Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 4\sqrt{3} + 6i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
(indication : poser $z = a + ib$ avec a et b réels.

★
Exercice 12

Soient a et b deux réels.

1) Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $e^{ia} \times e^{ib}$.
2) En déduire les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.

★
Exercice 13

Soit θ un nombre réel.

1) a) Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $(e^{i\theta})^2$.
   b) En déduire que $\cos^2(\theta) = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$.
2) En considérant le nombre $(e^{i\theta})^3$, exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\cos(3\theta)$.

★
Exercice 14

Soit $a \in]0, \pi[$. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \dfrac{1-e^{ia}}{1+e^{-ia}}$.
(indication : factoriser au numérateur et au dénominateur par $e^{i\frac{a}{2}}$ *et* $e^{-i\frac{a}{2}}$*)*

★
Exercice 15

Exprimer les sommes suivante en fonction de θ et de n :

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ 2) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ 3) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$

★
Exercice 16

1) Montrer que les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont $1, j, j^2$ où j est un nombre complexe de module 1.
2) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
3) Montrer que l'équation $z^n = 1$ admet n solutions de module 1, notées $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$.
4) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

★ ★
Exercice 17

(D'après oraux ENS 2017)

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

   Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos(x) + i\sin(x)$ *et calculer* z^2
2) Montrer que pour tout $x \in]0; \pi[$ on a

$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3) Pour un entier $n \geq 2$, on introduit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

   Montrer que $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$
   Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
4) Trouver la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \to \infty$

Exercice 18

(D'après oraux ENS 2021) Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Soit $h > 0$ un réel. On définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - hy_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hx_n$$

1) On introduit le nombre complexe $z_n = x_n + iy_n$. Exprimer z_n en fonction de n et de z_0.
2) Calculer la limite de $x_n^2 + y_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$
3) Soit N un nombre entier. On définit le réel h_N de telle sorte que $\arg(1 + ih_N) = \dfrac{2\pi}{N}$.

   a) Montrer que $\sqrt{1 + h_N^2} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$
   b) En prenant $h = h_N$, on définit la suite (z_n) comme dans la première question (cette suite dépend donc de N). On note $w_N = z_N$ le N-ème terme de cette suite. Montrer que $w_N \to z_0$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 19

(D'après oraux ENS 2023)

1) On considère les ensembles suivants :

$$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \Im(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 1\}$$

   où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z. Représenter graphiquement ces deux ensembles.
2) Montrer que pour tout $z \in H$, le nombre complexe $\dfrac{1 + iz}{z + i}$ est bien défini et appartient à D
3) Montrer que la fonction définie sur H et à valeurs dans D donnée par la formule $\dfrac{1 + iz}{z + i}$ est une bijection. Quelle est sa fonction réciproque ?
4) On remplace les inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions de H et de D. La fonction est-elle encore bijective ?

Exercice 20

(D'après oraux ENS 2018)
Soit $k \geq 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{k}}$.

1) Soit $j \geq 0$ un entier. Si j est un multiple de k, que vaut ω^j ?
2) Pour tout entier $0 \leq \ell \leq k-1$, montrer que $|1 + \omega^\ell| = |\omega^{-\ell/2} + \omega^{\ell/2}| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right)\right|$.
3) Soit $j \geq 0$ un entier. Calculer la quantité

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$$

   suivant si j est un multiple de k ou non.
4) Montrer que

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} = \frac{1}{k} 2^n + \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n$$

5) Soit X_n le nombre de piles obtenus dans une succession de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Montrer que la probabilité que X_n soit un multiple de k converge lorsque $n \to +\infty$ et calculer la limite.